РАЗДЕЛ I
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 531.6

Алюшин Ю. А.

ОСОБЕННОСТИ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА (Сообщение 1)

В механике сплошных сред [1, 2] уравнениями движения называют любую зависимость между текущими $x_i \in (x, y, z)$ и начальными $\alpha_p \in (\alpha \equiv x_0, \beta \equiv y_0, \gamma \equiv z_0)$ координатами при изменении времени *t*:

$$f(\alpha_p, x_i, t) = 0. \qquad (1)$$

В качестве времени, в зависимости от рассматриваемого процесса, могут быть приняты высота осаживаемой заготовки, угол закручивания при кручении, радиус центрального слоя при изгибе и пр. Любые формы записи уравнений (1) равнозначны с точки зрения однозначного определения текущего состояния, например, исследуемого объёма деформируемого тела, по сравнению с его исходным состоянием.

Из всего множества типов уравнений (1) выделяют два, которые отличаются выбором аргументов при описании различных функций, связанных с движением. Уравнения, в которых аргументами являются текущие координаты точек, например, для перемещений $u_i(x_i, t) = x_i - (x_i)_{t=0} = x_i - \alpha_i$, называются уравнениями в форме Эйлера. Именно переменные Эйлера используются в основном в качестве аргументов в общепринятой механике деформируемого твердого тела [1, 2]. Это, в частности, относится к деформациям $\varepsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)/2$, скоростям деформации $\xi_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)/2$ и условиям равновесия $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0$, где предполагается, что компоненты векторов перемещения $u_i(x_i, t)$ и скорости $v_i(x_i, t)$, а также напряжения $\sigma_{ij}(x_i, t)$ выражены через текущие координаты частиц $x_i \in (x, y, z)$. Чтобы получить зависимости $u_i(x_i, t)$, уравнения движения (1) также должны быть записаны в форме Эйлера:

$$\alpha_p = \alpha_p(x_i, t), \qquad \alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma). \qquad (2)$$

Система (2) редко встречается в публикациях по исследованию процессов, например, обработки давлением, в явном виде. Это связано с тем, что обычно, с учетом граничных условий, принимают непосредственно поля скоростей или напряжений для текущего состояния системы (рассматриваемого момента времени) и уравнения типа (2) не являются необходимыми. Вместе с тем, они могут быть получены путём интегрирования по времени, например, кинематически возможных полей скоростей в методе верхней оценки [3].

В общем случае система (2) содержит 3 уравнения (по числу независимых координат) и её можно решить относительно аргументов $x_i \in (x, y, z)$, записав результат в форме:

$$x_i = x_i(\alpha_p, t). \qquad (3)$$

Эту систему называют описанием движения в форме Лагранжа. Так как переменные Лагранжа $\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ для каждой частицы остаются неизменными на всем рассматриваемом интервале времени, их обычно называют «вмороженной» или «сопутствующей» системой координат [1, 2].

Использование переменных Эйлера для определения функций, связанных с движением, обычно мотивируют сравнительной простотой формул и хорошо развитой теорией поля. Однако физические закономерности должны формулироваться не для точек пространства, а для материальных частиц, «…с физической точки зрения переменные Лагранжа кажутся особенно удобными для описания движения сплошной среды, начальное состояние которой представляет обычно однородное ненапряженное состояние» [2].

Цель работы – показать особенности и преимущества применения переменных Лагранжа как при описании движения (3), так и при определении всех других функций, связанных с движением, в том числе за счет использования принципа суперпозиции и перехода к новым, согласованным с законом сохранения энергии, мерам деформации и напряжений [4, 5].

Уравнения движения (1) в любой форме должны нести всю информацию о любых внешних воздействиях и внутренних изменениях, происходящих с частицами в процессе движения. Логическим основанием для такого утверждения может быть условие, которое обычно не упоминается и считается само собой разумеющимся, что в механике рассматриваются только такие явления, которые отражаются на движении и, следовательно, на уравнениях (1).

Задача любого исследования – выявить объективные закономерности, характеризующие влияние внешних воздействий на состояние механической системы. Но так как система отсчета наблюдателя всегда субъективна, связанные с ней начальные $\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ и текущие $x_i \in (x, y, z)$ координаты также субъективны и не могут участвовать в описании физических закономерностей процессов. Объективные характеристики могут определяться лишь через производные от функций (2) или (3) по времени и пространственным переменным $\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ или $x_i \in (x, y, z)$. Целесообразность, а в некоторых случаях и необходимость учета истории движения (в частности, деформации), возможность использования принципа суперпозиции движений [5], а также простота математических соотношений при переходе к новым мерам деформации делает предпочтительной форму Лагранжа (3).

Для системы (3) аргументами объективных характеристик могут быть 12 первых производных (3 по времени $x_{i,t}(\alpha_p, t) \equiv \partial x_i / \partial t$ и 9 по переменным Лагранжа $x_{i,p} \equiv \partial x_i / \partial \alpha_p$). С учетом основного постулата механики, в соответствии с которым поведение частиц зависит только от их положения и скоростей [1, 2], для прогнозирования развития системы могут быть привлечены дополнительно вторые смешанные производные $x_{i,tp} \equiv \partial^2 x_i / (\partial t \partial \alpha_p) \equiv \partial x_{i,t} / \partial \alpha_p$ (аналоги скоростей деформации) и вторые производные по пространственным переменным $x_{i,pq} \equiv \partial^2 x_i / (\partial \alpha_p \partial \alpha_q)$, которые характеризуют изменение деформированного состояния в соседних частицах рассматриваемого объема.

В самом общем случае без каких-либо ограничений на свойства сплошной среды система (3) имеет 13 независимых локальных кинематических инвариантов, не зависящих от выбора системы координат [6]. Именно они определяют состояние системы и могут быть использованы для прогнозирования её поведения при различных внешних воздействиях.

Первые и вторые производные от уравнений (3) по времени («субстанциональные» производные) определяют компоненты векторов скорости $x_{i,t} = v_i$ и ускорения частиц $x_{i,tt} = v_{i,t} = w_i$. Как и вектор перемещения с компонентами $u_i(\alpha_p, t) = x_i - (x_i)_{t=0} = x_i - \alpha_i$, они имеют по одному инварианту – модули векторов перемещения $\vec{u}(\alpha_p, t)$, скорости $\vec{v}(\alpha_p, t)$ и ускорения $\vec{w}(\alpha_p, t)$:

$$\xi_1 = |u| = \sqrt{u^2}\,, \qquad \xi_2 = |v| = \sqrt{v^2}\,, \qquad \xi_3 = |w| = \sqrt{w^2}\,. \tag{4}$$

Инвариантом также является путь *s*, равный интегралу по времени от модуля скорости:

$$\xi_4 = s = \int_0^t |v|\,dt\,. \tag{5}$$

Компоненты несимметричного тензора второго ранга:

$$x_{i,p} \equiv \partial x_i / \partial \alpha_p , \tag{6}$$

образуемого производными от переменных Эйлера по переменным Лагранжа, определяют поворот и деформацию частицы с тремя инвариантами (линейным, квадратичным и кубическим) [6]. Кубический инвариант ξ_7 совпадает с якобианом преобразования (3):

$$\xi_7 = R = | x_{i,p} | = \delta V / \delta V_0 , \tag{7}$$

и равен отношению объемов бесконечно малой частицы в текущем δV и исходном δV_0 состояниях.

Квадратичный инвариант равен сумме квадратов элементов тензора (6):

$$\xi_6 = x_\alpha^2 + x_\beta^2 + x_\gamma^2 + y_\alpha^2 + y_\beta^2 + y_\gamma^2 + z_\alpha^2 + z_\beta^2 + z_\gamma^2 = x_{i,p} x_{i,p} . \tag{8}$$

В правой части уравнения использовано правило суммирования по повторяющемуся в одночлене индексу [1].

Каждая сумма квадратов производных с одинаковым нижним индексом в уравнении (8) равна квадрату отношений длин рёбер бесконечно малого параллелепипеда в текущем и исходном состояниях, которые в исходном состоянии были ориентированы вдоль соответствующих направлений, например, вдоль оси x [4, 6]:

$$e_\alpha^2 = x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 = (\delta l / \delta l_0)_\alpha^2 . \tag{9}$$

Деформацию частицы характеризуют среднее значение:

$$e = (e_\alpha + e_\beta + e_\gamma)/3 \tag{10}$$

и среднеквадратическое отклонение относительных длин рёбер (9) от их среднего значения e:

$$\Gamma^2 = (e_\alpha - e)^2 + (e_\beta - e)^2 + (e_\gamma - e)^2 = (e_p - e)(e_p - e) . \tag{11}$$

Линейный инвариант:

$$\xi_5 = x_\alpha + y_\beta + z_\gamma \tag{12}$$

характеризует деформацию и поворот частицы.

Инварианты $\xi_1 - \xi_7$ всегда положительны, в исходном состоянии принимают значения $\xi_1 = \xi_4 = \xi_3 = \xi_4 = 0$, $\xi_5 = \xi_6 = 3$, $\xi_7 = 1$. Если величины e_p отличны от 1, форма и/или объём частиц изменяются, т. е. движение сопровождается деформацией. Если же в процессе движения $e_p = 1$, $R = 1$, $\xi_6 = 3$, $\Gamma = 0$, деформация отсутствует. Такие случаи соответствуют движению абсолютно твёрдых тел.

Инварианты $\xi_5 - \xi_7$, с точки зрения основного постулата механики, характеризуют положение частиц, тензор (6) можно рассматривать как обобщенные координаты, их скорости образуют несимметричный тензор («обобщенные скорости»):

$$x_{i,tp} \equiv \partial x_{i,t} / \partial \alpha_p , \tag{13}$$

который также имеет три инварианта: линейный, квадратичный и кубический

$$\xi_8 = x_{t\alpha} + y_{t\beta} + z_{t\gamma} , \quad \xi_9 = x_{t\alpha}^2 + x_{t\beta}^2 + x_{t\gamma}^2 + y_{t\alpha}^2 + y_{t\beta}^2 + y_{t\gamma}^2 + z_{t\alpha}^2 + z_{t\beta}^2 + z_{t\gamma}^2 , \quad \xi_{10} = | x_{i,tp} | . \tag{14}$$

Дополнительно 3 инварианта могут быть получены интегрированием по времени модулей инвариантов ξ_8, ξ_9, ξ_{10} (по аналогии с $\xi_4 = s$). В отличие от инвариантов $\xi_5 - \xi_7$, которые в процессе деформации могут расти или уменьшаться, значения:

$$\xi_{11} = \int_0^t \sqrt{(x_{t\alpha} + y_{t\beta} + z_{t\gamma})^2} dt , \; \xi_{12} = \int_0^t \left(x_{t\alpha}^2 + x_{t\beta}^2 + x_{t\gamma}^2 + y_{t\alpha}^2 + ... + z_{t\alpha}^2 + z_{t\beta}^2 + z_{t\gamma}^2 \right)^{1/2} dt , \; \xi_{13} = \int_0^t | x_{i,tp} |^{1/3} dt \tag{15}$$

только возрастают на протяжении всего процесса деформации и позволяют учесть историю деформирования, аналогично критерию Одквиста [7, 8].

Квадратичный инвариант (8) может быть представлен в виде суммы квадратов отношений длин ребер бесконечно малого параллелепипеда (9), ориентированного в исходном состоянии вдоль осей координат наблюдателя, или суммы утроенного квадрата среднего значения (10) и среднеквадратического отклонения фактических отношений длин ребер от их среднего значения (11):

$$\xi_6 = \Gamma_e^2 = x_{i,p} x_{i,p} = e_p e_p = 3e^2 + \Gamma^2 . \qquad (16)$$

Этот инвариант характеризует энергию обратимой деформации [4, 7]. При деформации в главных осях он совпадает с квадратом отношения длин диагоналей прямоугольного параллелепипеда в текущем и исходном состояниях [6].

Из 13 локальных инвариантов ξ_i только 12 следует считать независимыми, так как они должны быть связаны обобщённым законом движения, определяющим реакции системы на внешние воздействия. Аргументами объективного закона должны быть все инварианты. Иначе говоря, чтобы сравнивать состояния и предсказывать реакцию системы на внешние воздействия, инварианты $\xi_1 - \xi_{13}$ следует привести к одному обобщенному скаляру:

$$э = э(\xi_i) . \qquad (17)$$

Как и все инварианты, эта обобщённая характеристика движения является локальной, может изменяться при переходе от одной частицы к другой. Принимая во внимание определение энергии по Аристотелю [9] («обобщенная мера различных видов движения») функцию (17) следует рассматривать как объёмную плотность энергии и для бесконечно малой частицы с объёмом δV_0 энергия составит $\delta E(\xi_i) = э(\xi_i)\delta V_0$.

В первом приближении обобщенный скаляр (17) можно представить в виде суммы $э = \sum э_i(\xi_i)$, в которой каждое из слагаемых $э_i(\xi_i)$ зависит только от одного инварианта и в простейшем случае равно произведению соответствующего инварианта ξ_i и скалярного множителя k_i, обеспечивающего равенство размерностей всех слагаемых

$$э_i = k_i \xi_i \qquad \text{или} \qquad \delta E = \sum \delta E_i(\xi_i) = \sum э_i \delta V_0 = \sum k_i \xi_i \delta V_0 . \qquad (18)$$

В уравнении (18) использован оператор δ для бесконечно малой энергии δE частицы с объемом δV_0. Независимость пространства переменных Лагранжа в уравнениях (3) от времени позволяет использовать два независимых дифференциальных оператора для времени (d) и пространства (δ). Первый характеризует изменение любого свойства, связанного с движением, для фиксированной частицы за бесконечно малый промежуток времени dt, например координаты $dx(\alpha_p, t) = x_t(\alpha_p, t)dt$. Второй определяет бесконечно малые приращения в пространстве, в том числе приращения свойств, связанных с движением, для смежных частиц, лагранжевы координаты которых в исходном состоянии отличались на бесконечно малые величины $\delta\alpha_p \in (\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma)$. Например приращение абсциссы смежных частиц составляет $\delta x = x_\alpha \delta\alpha + x_\beta \delta\beta + x_\gamma \delta\gamma$ (здесь, как и для индексных переменных, нижние индексы соответствуют дифференцированию по указанным в индексах переменным $x_\alpha \equiv \partial x / \partial\alpha$). Для приращения аналогичных свойств во времени необходимо использовать одновременно два оператора, например, изменение во времени приращения абсциссы смежных частиц определяет правая часть уравнения:

$$d\delta x = \delta dx = (x_{t\alpha}\delta\alpha + x_{t\beta}\delta\beta + x_{t\gamma}\delta\gamma)dt .$$

Независимость двух операторов позволяет менять порядок их записи без изменения конечного результата.

Скалярные коэффициенты k_i позволяют перейти от непосредственно измеряемых кинематических параметров к энергетическим. Учитывая фундаментальный смысл понятия (18), можно утверждать, что коэффициенты k_i должны характеризовать либо физические свойства материала, либо свойства среды, в которой происходит движение. Например, кинетическую энергию бесконечно малой частицы определяет квадрат скорости (инвариант ξ_2, величина кинетической энергии не должна зависеть от направления скорости частицы),

$$\delta E_k / \delta V_0 = k_2 \xi_2^2 = \delta m v^2 / (2\delta V_0) = \rho_0 v^2 / 2 \quad \text{или} \quad k_2 = \rho_0 / 2, \tag{19}$$

где δm – масса частицы, ρ_0 – плотность материала. Изменение потенциальной энергии при движении в гравитационном поле Земли зависит от вертикального перемещения частицы (инвариант ξ_1, ось z направлена от центра Земли):

$$\Delta\delta E_p / \delta V_0 = k_1 \Delta\xi_1 = \rho_0 g \Delta z \qquad \text{или} \qquad k_1 = \rho_0 g, \tag{20}$$

где g – ускорение свободного падения, множитель $k_1 = \rho_0 g$ учитывает свойства материала и среды, в которой происходит движение.

Коэффициенты при интегральных по времени инвариантах, в том числе для пути (5), должны характеризовать диссипативные процессы, например, связанные с трением на внешних поверхностях движущихся частиц и на поверхностях разрыва кинематически возможных полей скоростей.

Переход от инвариантов уравнений движения к объёмной плотности энергии позволяет получить практически все используемые в классической механике твердого тела уравнения, включая определяющие уравнения теории упругости и пластичности, а также дифференциальные уравнения движения, из закона сохранения энергии в виде приращений:

$$d\delta E = \delta V_0 (d \sum k_i \xi_i) = 0. \tag{21}$$

Уравнение (21) может быть справедливым только для изолированной (замкнутой) системы, которая не обменивается с окружающей средой ни веществом, ни энергией [1, 2]. К изолированным с определёнными погрешностями можно отнести маятниковые системы, если пренебречь сопротивлением воздуха и трением в подвеске.

Большинство механических систем нельзя считать изолированными. Для таких незамкнутых систем влияние отбрасываемой внешней среды должно быть заменено неким внешним воздействием, энергетически эквивалентным по влиянию на движение элементов выделяемой подсистемы, которое будем называть энергией внешних воздействий, и обозначать $d\delta E_e$. Тогда закон сохранения энергии (21) для бесконечно малой частицы принимает вид:

$$d\delta E = \delta V_0 (d \sum k_i \xi_i) - \delta d E_e = 0. \tag{22}$$

Для учета энергетических потоков со стороны окружающих частиц воспользуемся общепринятой методикой [1, 2], использующей скалярное произведение векторов силы $\delta\vec{P}$ и скорости $\vec{v}$ точек их приложения:

$$d\delta E_e = \sum (\delta\vec{P} \cdot \vec{v}) dt \tag{23}$$

Суммирование в правой части должно быть проведено по всем ограничивающим рассматриваемую бесконечно малую частицу поверхностям. Предполагая все функции дифференцируемыми и заданными в переменных Лагранжа, с учетом возможных изменений сил и скоростей на противоположных гранях, с точностью до бесконечно малых 1-го порядка (по пространственным переменным и времени), получим:

$$d\delta E_e / dt = \left(\delta P_{\alpha_p x_i} + \delta P_{\alpha_p x_i, \alpha_p} \delta\alpha_p\right)\left(x_{i,t} + x_{i,t\alpha_p} \delta\alpha_p\right) - \left(\delta P_{\alpha x_i} + \delta P_{\alpha x_i} + \delta P_{\alpha x_i}\right) x_{i,t}. \tag{24}$$

Отношения бесконечно малых сил δP_{pi} к площадям граней в их исходном состоянии:

$$\tau_{\alpha i} = \delta P_{\alpha i} / (\delta\beta\delta\gamma); \quad \tau_{\beta i} = \delta P_{\beta i} / (\delta\alpha\delta\gamma); \quad \tau_{\gamma i} = \delta P_{\gamma i} / (\delta\alpha\delta\beta), \tag{25}$$

будем называть напряжениями в пространстве переменных Лагранжа или *напряжениями Лагранжа*. Первый индекс $p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ указывает направление нормали к рассматриваемой площадке в исходном состоянии, второй индекс i – направление проекции силы, может принимать значения $i \in (x, y, z)$.

Напряжения τ_{pi} подобны напряжениям Пиола – Кирхгофа [1, 2], но отличаются от них не только предполагаемой областью изменения аргументов (пространство переменных Лагранжа), но и неоднозначным выбором начала отсчета шкалы средних напряжений, которое может быть смещено относительно общепринятой [4, 10].

С обозначениями (25) вместо (24) получим:

$$d\delta E_e = \sum (\delta\vec{P}\cdot\vec{v})dt = \delta V_0 dt\left(\tau_{pi}x_{i,tp} + x_{i,t}\partial\tau_{pi}/\partial\alpha_p\right). \quad (26)$$

Напряжения τ_{pi} образуют несимметричный тензор. С учетом энергии внешних взаимодействий (26):

$$\omega = d\delta E_e/\left(\delta V_0 dt\right) = \tau_{pi}x_{i,tp} + x_{i,t}\partial\tau_{pi}/\partial\alpha_p \quad (27)$$

закон сохранения энергии (22) можно записать в форме энергетического баланса:

$$d\delta E = \delta V_0(k_1\xi_{1,t} + k_2\xi_{2,t} + k_3\xi_{3,t} + \ldots + k_{13}\xi_{13,t} - \omega)dt = 0\,.$$

Используя соотношения (20) для потенциальной и (19) для кинетической энергии (ось z направлена вертикально вверх),

$$d\delta E_1 = \rho_0 g z_t \delta V_0 dt\,, \qquad d\delta E_2 = \rho_0(x_t x_{tt} + y_t y_{tt} + z_t z_{tt})\delta V_0 dt\,,$$

уравнение (26) принимает вид

$$d\delta E = \delta V_0[\rho_0 g z_t + \rho_0(x_t x_{tt} + y_t y_{tt} + z_t z_{tt}) + k_3\xi_{3,t} + \ldots + k_{13}\xi_{13,t} - \omega]dt = 0 \quad (28)$$

или

$$\begin{aligned} k_3\xi_{3,t} + k_4\xi_{4,t} + k_5\xi_{5,t} + k_6\xi_{6,t} + \ldots + k_{13}\xi_{13,t} &= \tau_{\alpha x}x_{t\alpha} + \tau_{\alpha y}y_{t\alpha} + \tau_{\alpha z}z_{t\alpha} + \tau_{\beta x}x_{t\beta} + \tau_{\beta y}y_{t\beta} + \tau_{\beta z}z_{t\beta} + \\ &+ \tau_{\gamma x}x_{t\gamma} + \tau_{\gamma y}y_{t\gamma} + \tau_{\gamma z}z_{t\gamma} + x_t\left(\partial\tau_{\alpha x}/\partial\alpha + \partial\tau_{\beta x}/\partial\beta + \partial\tau_{\gamma x}/\partial\gamma - \rho_0 x_{tt}\right) + \\ &+ x_t\left(\partial\tau_{\alpha x}/\partial\alpha + \partial\tau_{\beta x}/\partial\beta + \partial\tau_{\gamma x}/\partial\gamma - \rho_0 x_{tt}\right) + z_t\left(\partial\tau_{\alpha z}/\partial\alpha + \partial\tau_{\beta z}/\partial\beta + \partial\tau_{\gamma z}/\partial\gamma - \rho_0 z_{tt}\right). \end{aligned}$$

Энергия не должна зависеть от субъективного фактора – выбора системы отсчета скоростей, поэтому сумма последних трех слагаемых должна обращаться в 0 (эквивалент принципа наименьшего принуждения). Более жесткое условие равенства нулю каждой из скобок соответствует дифференциальным уравнениям движения или равновесия:

$$\partial\tau_{pi}/\partial\alpha_p = \rho_0 x_{i,tt} \qquad \text{или} \qquad \partial\tau_{pi}/\partial\alpha_p = 0\,. \quad (29)$$

Последняя система соответствует условию минимума функционала:

$$W = \int\limits_{V_0}\tau_{pi}x_{i,tp}\delta V = \int\limits_{V}\omega(x_{i,t\alpha}, x_{i,t\beta}, x_{i,t\gamma})\delta\alpha\delta\beta\delta\gamma\,.$$

Следовательно, действительное поле скоростей обеспечивает минимум интегральной мощности деформации W.

Пренебрегая процессами диссипации (без учета инвариантов, связанных с интегрированием по времени), вместо уравнения (28) получим:

$$d\delta E_1 + d\delta E_2 + d\delta E_3 + d\delta E_5 + d\delta E_6 + d\delta E_7 = \omega\delta V_0 dt\,.$$

Учитывая, что приращение третьего инварианта ξ_3 содержит производные третьего порядка по времени от текущих координат, которые не могут входить в обобщённый закон движения, в дальнейшем ограничимся, с учетом дифференциальных уравнений движения (29), соотношением:

$$\begin{aligned} \tau_{pi}x_{i,tp} &= k_5(x_{t\alpha} + y_{t\beta} + z_{t\gamma}) + \\ &+ 2k_6(x_\alpha x_{t\alpha} + x_\beta x_{t\beta} + x_\gamma x_{t\gamma} + y_\alpha y_{t\alpha} + y_\beta y_{t\beta} + y_\gamma y_{t\gamma} + z_\alpha z_{t\alpha} + z_\beta z_{t\beta} + z_\gamma z_{t\gamma}) + \\ &+ k_7(\tilde{x}_\alpha x_{t\alpha} + \tilde{x}_\beta x_{t\beta} + \tilde{x}_\gamma x_{t\gamma} + \tilde{y}_\alpha y_{t\alpha} + \tilde{y}_\beta y_{t\beta} + \tilde{y}_\gamma y_{t\gamma} + \tilde{z}_\alpha z_{t\alpha} + \tilde{z}_\beta z_{t\beta} + \tilde{z}_\gamma z_{t\gamma})\,. \end{aligned} \quad (30)$$

Инварианты (14) не включены в энергетический баланс обратимой деформации (30), так как их множители содержат производные от компонент ускорений по направлениям $x_{i,ttp}$, которые не входят в выражение (27) для мощности внешних воздействий.

Напряжения τ_{pi}, которые характеризуют поверхностную плотность сил (25), следует отнести к важнейшим характеристикам процессов деформации, так как именно они, в соответствии с дифференциальными уравнениями движения (29), определяют ускорения частиц и движение системы в целом.

Зависимости напряжений от свойств материала и деформированного состояния изучают в специальных разделах и формулируют в виде конституциональных (определяющих) уравнений или в виде законов, например, закона Гука или закона упругого изменения объёма. Как правило, эти уравнения определяют из экспериментальных исследований, но, как отмечено в работе [1], для этого могут быть использованы и общие термодинамические принципы. В частности, соотношения между физическими свойствами k_i, компонентами тензоров напряжений τ_{pi} и деформаций $x_{i,p}$ следуют непосредственно из закона сохранения энергии (30), который удобнее записать в виде:

$$\begin{aligned} & k_5(x_{t\alpha}+y_{t\beta}+z_{t\gamma})+ \\ & +2k_6(x_\alpha x_{t\alpha}+x_\beta x_{t\beta}+x_\gamma x_{t\gamma}+y_\alpha y_{t\alpha}+y_\beta y_{t\beta}+y_\gamma y_{t\gamma}+z_\alpha z_{t\alpha}+z_\beta z_{t\beta}+z_\gamma z_{t\gamma})+ \\ & +k_7(\widetilde{x}_\alpha x_{t\alpha}+\widetilde{x}_\beta x_{t\beta}+\widetilde{x}_\gamma x_{t\gamma}+\widetilde{y}_\alpha y_{t\alpha}+\widetilde{y}_\beta y_{t\beta}+\widetilde{y}_\gamma y_{t\gamma}+\widetilde{z}_\alpha z_{t\alpha}+\widetilde{z}_\beta z_{t\beta}+\widetilde{z}_\gamma z_{t\gamma})= \\ & =\tau_{\alpha x}x_{t\alpha}+\tau_{\alpha y}y_{t\alpha}+\tau_{\alpha z}z_{t\alpha}+\tau_{\beta x}x_{t\beta}+\tau_{\beta y}y_{t\beta}+\tau_{\beta z}z_{t\beta}++\tau_{\gamma x}x_{t\gamma}+\tau_{\gamma y}y_{t\gamma}+\tau_{\gamma z}z_{t\gamma}. \end{aligned}$$

Это равенство следует рассматривать как энергетическое тождество для каждой частицы, которое должно выполняться при любых видах движения, независимо от свойств материала или среды, в которой происходит движение. Оно является достаточным основанием для перехода к новым, более предпочтительным при использовании переменных Лагранжа, мерам деформации (6), скоростям деформации (13) и напряжений (25).

Приравнивая коэффициенты при одинаковых компонентах тензора (13), получаем соотношения между компонентами напряжений, деформаций (6) и константами k_i, характеризующими *физические свойства материала*

$$\tau_{\alpha x}=k_5+2k_6x_\alpha+k_7\widetilde{x}_\alpha,\ \tau_{\beta x}=2k_6x_\beta+k_7\widetilde{x}_\beta,\ \tau_{\gamma x}=2k_6x_\gamma+k_7\widetilde{x}_\gamma,\ \ldots\quad \tau_{\gamma z}=k_5+2k_6z_\gamma+k_7\widetilde{z}_\gamma,$$

которые можно записать в общем виде

$$\tau_{pi}=k_5\delta_{pi}+2k_6x_{i,p}+k_7\widetilde{x}_{i,p}. \tag{31}$$

В соотношениях (31) и далее $\widetilde{x}_{i,p}$ – алгебраические дополнения элементов $x_{i,p}$ матрицы (6), единичный тензор δ_{pi} принимает значения $\delta_{pi}=1$ при соответствии индексов «*p*» и «*i*», т. е. $\delta_{pi}=1$ для $\tau_{\alpha x},\tau_{\beta y},\tau_{\gamma z}$ и $\delta_{pi}=0$ для всех остальных напряжений.

Как следует из уравнений (31), напряжения Лагранжа τ_{pi} зависят от 3 физических характеристик материала. В исходном состоянии, когда переменные Эйлера и Лагранжа совпадают (матрица (6) преобразуется в единичную), компоненты тензора определяют только физические свойства:

$$\tau_{\alpha x}=\tau_{\beta y}=\tau_{\gamma z}=k_5+2k_6+k_7,\qquad \tau_{\beta x}=\tau_{\gamma x}=\tau_{\alpha y}=\tau_{\gamma y}=\tau_{\alpha z}=\tau_{\beta z}=0.$$

Субъективные факторы, в том числе выбор способа определения энергии, влияют на значения коэффициентов k_5-k_7 и напряжения τ_{pi}.

Для выявления зависимости между напряжениями Лагранжа τ_{pi} и Коши σ_{ij} рассмотрим энергетический баланс в начальный момент времени, когда вместо (28) можно записать:

$$d\delta E/(\delta V dt) = \sigma_{ij} x_{j,ti} + x_{j,t}(\partial\sigma_{ij}/\partial x_j - \rho x_{i,tt}). \qquad (32)$$

Выражения в скобках соответствуют дифференциальным уравнениям движения $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = \rho \cdot x_{i,tt}$. Переходя от производных по переменным Эйлера $\partial x_{i,t}/\partial x_j \equiv x_{i,tj}$ к производным по переменным Лагранжа $\partial x_{i,t}/\partial\alpha_p \equiv x_{i,tp}$ с помощью общих соотношений, вытекающих из уравнений движения (3), $\partial f/\partial x_i = (\partial f/\partial\alpha_p)\widetilde{x}_{i,p}/R$, и приравнивая коэффициенты при одинаковых множителях $x_{i,tp}$ в правых частях уравнений (26) и (32), получим систему линейных уравнений $\tau_{pi} = \sigma_{ji}\widetilde{x}_{j,p}$, которые формально совпадают с известными статическими условиями на контуре и по существу определяют связи между напряжениями Лагранжа и Коши, справедливые для любого момента времени:

$$\sigma_{ji} = \tau_{pi} x_{j,p}/R. \qquad (33)$$

Равенства (33) известны как зависимости между напряжениями Коши и Пиола – Кирхгофа [1], их можно трактовать как следствие условия инвариантности энергии по отношению к выбору начала отсчета времени. В развернутой форме они имеют вид:

$$\sigma_{xi} = \left(\tau_{\alpha i}x_\alpha + \tau_{\beta i}x_\beta + \tau_{\gamma i}x_\gamma\right)/R,\ \sigma_{yi} = \left(\tau_{\alpha i}y_\alpha + \tau_{\beta i}y_\beta + \tau_{\gamma i}y_\gamma\right)/R,\ \sigma_{zi} = \left(\tau_{\alpha i}z_\alpha + \tau_{\beta i}z_\beta + \tau_{\gamma i}z_\gamma\right)/R.$$

С учетом $\xi_5 - \xi_7$ для напряжений σ_{ji} окончательно получаем:

$$\sigma_{ji} = \frac{1}{R}\left(\tau_{\alpha i}x_{j,\alpha} + \tau_{\beta i}x_{j,\beta} + \tau_{\gamma i}x_{j,\gamma}\right) = \frac{1}{R}\left[k_5 x_{j,\alpha} + 2k_6(x_{i,\alpha}x_{j,\alpha} + x_{i,\beta}x_{j,\beta} + x_{i,\gamma}x_{j,\gamma}) + k_7(x_{j,\alpha}\widetilde{x}_{i,\alpha} + x_{j,\beta}\widetilde{x}_{i,\beta} + x_{j,\gamma}\widetilde{x}_{i,\gamma})\right], \qquad (34)$$

например,

$$\sigma_{xx} = \left(\tau_{\alpha x}x_\alpha + \tau_{\beta x}x_\beta + \tau_{\gamma x}x_\gamma\right)/R = \left[k_5 x_\alpha + 2k_6(x_\alpha^2 + x_\beta^2 + x_\gamma^2) + k_7(x_\alpha\widetilde{x}_\alpha + x_\beta\widetilde{x}_\beta + x_\gamma\widetilde{x}_\gamma)\right]/R,$$

$$\sigma_{xy} = \left(\tau_{\alpha y}x_\alpha + \tau_{\beta y}x_\beta + \tau_{\gamma y}x_\gamma\right)/R = \left[k_5 x_\beta + 2k_6(x_\alpha y_\alpha + x_\beta y_\beta + x_\gamma y_\gamma) + k_7(x_\alpha\widetilde{y}_\alpha + x_\beta\widetilde{y}_\beta + x_\gamma\widetilde{y}_\gamma)\right]/R.$$

Учитывая, что множители коэффициента k_7 в уравнениях (34) могут принимать только 2 значения $x_{j,\alpha}\widetilde{x}_{i,\alpha} + x_{j,\beta}\widetilde{x}_{i,\beta} + x_{j,\gamma}\widetilde{x}_{i,\gamma} = R$ при $i = j$ и $x_{j,\alpha}\widetilde{x}_{i,\alpha} + x_{j,\beta}\widetilde{x}_{i,\beta} + x_{j,\gamma}\widetilde{x}_{i,\gamma} = 0$ при $i \neq j$, фактически коэффициент k_7 входит только в нормальные напряжения:

$$\sigma_{ii} = \left(\tau_{\alpha i}x_{i,\alpha} + \tau_{\beta i}x_{i,\beta} + \tau_{\gamma i}x_{i,\gamma}\right)/R = \left[k_5 x_{i,\alpha} + 2k_6(x_{i,\alpha}x_{i,\alpha} + x_{i,\beta}x_{i,\beta} + x_{i,\gamma}x_{i,\gamma}) + k_7 R\right]/R.$$

Основной инвариантной характеристикой напряженного состояния можно считать среднее напряжение Коши σ:

$$3\sigma R = k_5\xi_5 + 2k_6\xi_6 + 3k_7\xi_7.$$

Из энергетических соотношений (28) – (34) следует, что напряжения (31) предпочтительнее: они энергетически обоснованы и связаны простыми уравнениями с имеющими четкий геометрический смысл характеристиками деформированного состояния.

ВЫВОДЫ

Описание движения в форме Лагранжа имеет ряд преимуществ за счет возможности использования достаточно простого принципа суперпозиции, который позволяет получать уравнения движения сложных процессов, используя соответствующие решения для простых составляющих. Дифференцирование уравнений движения по времени и пространству определяет характеристики деформированного и, если известны свойства, напряженного состояний. Оценку точности решения следует проводить по выполнению дифференциальных уравнений движения или равновесия. Для повышения точности результатов значения варьируемых параметров, используемых в уравнениях движения (3), можно уточнить из условия минимума интегральной мощности деформации, по аналогии с обычным методом верхней оценки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford : Clarendon Press, 1950. / Р. Хилл – Математическая теория пластичности. М. : Гостехиздат, 1956. – 408 с.
2. Прагер В. Введение в механику сплошных сред / В. Прагер – М. : Иностранная литература, 1963. – 312 с.
3. Методы определения траекторий частиц в процессах деформации / Ю. А. Алюшин, Г. П. Жигулев, А. М. Широких, М. М. Скрипаленко // Обработка металлов давлением : сборник научных трудов. – Краматорск : ДГМА, 2009. – № 1 (20). – С. 4–10.
4. Алюшин Ю. А. Механика твёрдого тела в переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин – М. : Машиностроение, 2012. – 192 с.
5. Алюшин Ю. А. Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. – № 3. – С. 13–19.
6. Алюшин Ю. А. Механика процессов деформации в пространстве переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин – М. : Машиностроение, 1997. – 136с.
7. Алюшин Ю. А. Осесимметричная деформация в переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин, А. А. Сидоров // Достижения и проблемы развития технологии и машин обработки давлением. – Краматорск, 2012. – С. 5–11.
8. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов – М. : Наука, 1969. – 420 с.
9. Богомолов А. Н. Механика в истории человечества / А. Н. Богомолов – М. : Наука, 1978. –150 с.
10. Алюшин Ю. А. Энергетическая шкала средних напряжений и свойства металлов в области обратимых и необратимых деформаций / Ю. А. Алюшин // Проблемы машиностроения и надёжности машин, 2010. – № 3. – С. 95–104.

REFERENCES

1. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford : Clarendon Press, 1950. / R. Hill – Matematicheskaja teorija plastichnosti. M. : Gostehizdat, 1956. – 408 s.
2. Prager V. Vvedenie v mehaniku sploshnyh sred / V. Prager – M. : Inostrannaja literatura, 1963. – 312 s.
3. Metody opredelenija traektorij chastic v processah deformacii / Ju. A. Aljushin, G. P. Zhigulev, A. M. Shirokih, M. M. Skripalenko // Obrabotka metallov davleniem : sbornik nauchnyh trudov. – Kramatorsk : DGMA, 2009. – № 1 (20). – S. 4–10.
4. Aljushin Ju. A. Mehanika tvjordogo tela v peremennyh Lagranzha / Ju. A. Aljushin – M. : Mashinostroenie, 2012. – 192 s.
5. Aljushin Ju. A. Princip superpozicii dvizhenij v prostranstve peremennyh Lagranzha / Ju. A. Aljushin // Problemy mashinostroenija i nadezhnosti mashin. 2001. – № 3. – S. 13–19.
6. Aljushin Ju. A. Mehanika processov deformacii v prostranstve peremennyh Lagranzha / Ju. A. Aljushin – M. : Mashinostroenie, 1997. – 136s.
7. Aljushin Ju. A. Osesimmetrichnaja deformacija v peremennyh Lagranzha / Ju. A. Aljushin, A. A. Sidorov // Dostizhenija i problemy razvitija tehnologii i mashin obrabotki davleniem. – Kramatorsk, 2012. – S. 5–11.
8. Kachanov L. M. Osnovy teorii plastichnosti / L. M. Kachanov – M. : Nauka, 1969. – 420 s.
9. Bogomolov A. N. Mehanika v istorii chelovechestva / A. N. Bogomolov – M. : Nauka, 1978. –150 s.
10. Aljushin Ju. A. Jenergeticheskaja shkala srednih naprjazhenij i svojstva metallov v oblasti obra-timyh i neobratimyh deformacij / Ju. A. Aljushin // Problemy mashinostroenija i nadjozhnosti mashin, 2010. – № 3. – S. 95–104.

Алюшин Ю. А. – д-р техн. наук, проф. НИТУ МИСиС

НИТУ МИСиС – Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС».

E-mail: alyushin7@gmail.com

Статья поступила в редакцию 15.09.2014 г.